Estudios Pedagógicos XLIX, N° 1: 255-280, 2023
DOI: 10.4067/S0718-07052023000100255

INVESTIGACIONES

Perfiles de conocimiento matemático de estudiantes de pedagogía en educación básica para enseñar geometría[1]

Mathematics knowledge profiles for students of pedagogy in basic education to teach geometry

Natalia Ruiz[a, b]
Eugenio Chandía[c]
Daniza Rojas[d]
Mirian Baeza[e]
Cristian Reyes[a]

[a] CIAE, Instituto de Estudios Avanzados en Educación, Universidad de Chile.
natalia.ruiz@ciae.uchile.cl, cristian.reyes@ciae.uchile.cl

[b] Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

[c] Facultad de Educación, Universidad de Concepción.
echandia@udec.cl

[d] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad de Antofagasta.
daniza.rojas@uantof.cl

[e] Facultad de Educación, Universidad de Antofagasta.
mirian.baeza@uantof.cl

RESUMEN

El conocimiento matemático para enseñar ha sido amplia y genéricamente estudiado por el efecto que tiene en la calidad de las prácticas de enseñanza de los docentes y en los aprendizajes que pueden lograr los estudiantes en el aula escolar. Así, este estudio se adentra en las variaciones del conocimiento matemático para enseñar la geometría en una muestra de 94 estudiantes de pedagogía de educación primaria. Validando psicométricamente un instrumento, se determinan perfiles de desempeño de acuerdo con las dimensiones del conocimiento matemático para enseñar geometría y a los factores de agrupamiento resultantes usando la técnica de análisis de clases latentes. Los resultados evidencian diferentes perfiles de conocimiento con desiguales desempeños, siendo los más altos los relativos a la medición y visualización de figuras y cuerpos, y los más bajos los referidos a los conocimientos sobre errores típicos y a la selección de actividades en el tópico de ángulos.

Palabras clave: perfiles de conocimiento, formación inicial docente en primaria, conocimiento matemático para enseñar geometría, geometría.

ABSTRACT

Mathematical knowledge for teaching has been broadly and generically studied for the effect it has on the quality of teachers' teaching practices and on the learning that students can achieve in the school classroom. Thus, this study delves into the variations of geometric knowledge to teach in a sample of 94 primary education pedagogy

[1] La investigación se desarrolló el marco del proyecto FONDEF ID19I10129 en colaboración con el proyecto AED18-03 y el proyecto FONDECYT 3201094. El primer y quinto autor agradecen el financiamiento otorgado por ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003

Recibido: 23/12/2021
Aceptado: 20/06/2023

students. By psychometrically validating an instrument, performance profiles were determined according to the dimensions of mathematical knowledge to teach and the resulting grouping factors using the latent class analysis technique. The results show different profiles of knowledge with unequal performances, the highest being those related to the measurement and visualization of figures and bodies, and the lowest those related to knowledge about typical errors and the selection of activities on the topic of angles.

Key words: Knowledge profiles, Primary Teacher Education, Geometric Knowledge to Teach, Geometry.

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas se han realizado numerosas investigaciones relacionadas con el conocimiento matemático del profesor y se ha llegado a un amplio consenso que este es un recurso importante en el conjunto de herramientas de los docentes. Al respecto, Kaiser y Koning (2019) han demostrado que los niveles de conocimiento del profesor dependen de las oportunidades de aprendizaje ofrecidas en la Formación Inicial Docente (FID). De este modo, resulta relevante estudiar el conocimiento de los candidatos a profesor en formación inicial, e identificar perfiles respecto a este.

La importancia del conocimiento del profesor se ha construido y sostenido gracias a investigaciones que han abordado este tema desde distintas perspectivas. Uno de los grandes hallazgos que se ha demostrado es que el conocimiento de los profesores que enseñan matemática tiene un impacto en el aprendizaje de los estudiantes (Campbell *et al*., 2014; Charalambous *et al*., 2020; Hill *et al*., 2005). Es decir, los desempeños de los estudiantes son mejores cuando los docentes poseen un nivel específico de conocimiento. Otro resultado relevante es que la práctica profesional de los docentes se ve afectada por el conocimiento de estos; las decisiones, acciones y prácticas que realizan en el aula se ven afectadas por múltiples factores y uno de los más relevantes es el conocimiento del profesor (Charalambous, 2016; Hill *et al*., 2008; Munter y Correnti, 2017). Por tanto, participar de una formación profesional adecuada que construya de manera firme el conocimiento de los futuros profesores, impactará en mejores prácticas pedagógicas que influirán de manera positiva en el desempeño de los estudiantes.

Por mucho tiempo se puso foco en el conocimiento disciplinar del docente, pero a mediados de los ochenta, Shulman (1986) planteó la hipótesis de que el conocimiento del contenido por sí solo no sería suficiente para la labor docente. Fue así como, introdujo el concepto de Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) el cual gatilló la atención de la academia, y la realización de un enorme número de investigaciones en torno a este tema. En particular, los especialistas en educación matemática han propuesto diferentes modelos conceptuales para el conocimiento del profesor (Ball *et al*., 2008; Blömeke *et al*., 2011; Howey y Grossman, 1989; McCrory *et al*., 2012; Rowland *et al*., 2005), es decir, modelos que identifican y estructuran diversos componentes de este conocimiento. En esta investigación, utilizamos el modelo propuesto por Ball *et al*. (2008) sobre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME).

Dada la relevancia del conocimiento del profesor, en particular, del conocimiento matemático para la enseñanza, cabe preguntarse qué es lo que se espera de las instituciones formadoras de profesores respecto a esta temática. En Chile, el Ministerio de Educación ha desarrollado un programa de mejoramiento de la calidad de la formación inicial docente bajo el marco de rendición de cuentas (Cochran-Smith, 2021; Darling-Hammond, 2020) con la construcción de Estándares Orientadores para la Formación Inicial de Docentes en los distintos niveles: educación parvularia, básica (primaria), especial y media (secundaria). En particular, los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica consideran entre sus requerimientos implementar el currículo escolar en la FID, y se espera que los docentes egresados de las instituciones formadoras posean el conocimiento y las competencias para liderar dichos aprendizajes en los niveles de 1º a 6º básico (Ministerio de Educación [Mineduc], 2012b). De manera paralela, la Ley 20.903 que crea el Sistema de Desarrollo Docente de Chile establece que los estudiantes de pedagogía deben rendir dos evaluaciones diagnósticas: la primera, aplicada por la universidad al inicio de la carrera; la segunda, ejecutada por el Ministerio de Educación y denominada Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (ENDFID), a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), durante los 12 meses que anteceden al último año de la carrera. El objetivo de estas evaluaciones es entregar información a las universidades para elaborar planes de mejora de sus programas formativos.

Pese a esta impronta, Pino-Fan *et al*. (2018) afirman que la ENDFID se enfoca principalmente en evaluar conocimiento disciplinar y pedagógico general, dejando de lado la evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza o conocimiento didáctico-matemático. Esta carencia, la viene a soportar esta investigación aportando con un instrumento que mide de manera fiable el conocimiento matemático para la enseñanza de los candidatos a profesor. Además, entrega una forma metodológica para informar sobre los niveles de desempeño de los estudiantes de pedagogía en educación básica agrupados en los factores psicométricos establecidos por el proceso de validación y agrupados por la referencia teórica orientadora para la construcción del instrumento.

Por tanto, el propósito de esta investigación es determinar los perfiles de conocimiento matemático para enseñar la geometría de estudiantes de pedagogía en educación básica, y contribuir con un instrumento para su medición. Así, las preguntas que orientan este estudio son: ¿Cómo se agrupan las respuestas de los estudiantes de pedagogía al contestar un instrumento construido en base al modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza en el eje de Geometría? Además, ¿Cuáles son los perfiles de los estudiantes de pedagogía en función de las dimensiones del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza en el contexto del eje de Geometría?

2. MARCO TEÓRICO

2.1. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA

El rol que juega el profesor en el proceso de enseñanza de la matemática es fundamental en el aprendizaje de sus estudiantes. En particular, un importante objeto de estudio en la educación matemática es el conocimiento que debería tener un profesor de matemática en su práctica docente (Almeida y Ribeiro, 2020; Ball *et al*., 2008; Baumert *et al*., 2010; Blömeke *et al*., 2014; Carrillo *et al*., 2018; Charalambous *et al*., 2020; Hill, 2010; Krauss *et al*., 2008).

Uno de los primeros investigadores en conceptualizar el conocimiento del profesor para enseñar fue Shulman (1986), y propuso la distinción entre dos dominios: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Él señalaba que en el conocimiento del contenido:

> No sólo es necesario comprender que algo es así; el maestro debe comprender además por qué es así, sobre qué bases se puede afirmar su justificación y bajo qué circunstancias nuestra creencia en su justificación puede debilitarse e incluso negarse. (p. 9)

Además, Shulman (1987) describió al conocimiento pedagógico del contenido como una "Amalgama especial de contenido y pedagogía que es únicamente competencia de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (p. 8). Aún más, Ball *et al*. (2008) argumentaron que los problemas identificados por Shulman (1986, 1987) son clave para la investigación sobre la enseñanza y la formación del profesorado. En este sentido, se han propuesto diversos modelos que abordan la caracterización del conocimiento que un profesor de matemática debería tener para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Por ejemplo, el modelo *Conocimiento Didáctico-Matemático* propuesto por Godino (2009); el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática* propuesto por Carrillo *et al*. (2013); *Teoría de la Proficiencia* propuesto por Schoenfeld y Kilpatrick (2008); *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* propuesto por Ball *et al*. (2008).

Ball *et al*. (2008) se refieren al Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) como el conocimiento necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñar matemática; su propuesta ha sido una de las más empleadas en las investigaciones sobre el conocimiento matemático que debe tener un profesor para lograr una enseñanza eficaz (Buschang *et al*., 2012; Charalambous, 2016; Delaney, 2012; Hiebert *et al*., 2019; Hill *et al*., 2007; Krauss *et al*., 2008). El modelo del CME consta de dos dominios: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, que es similar a lo propuesto por Shulman (1986). Además, el modelo CME presenta tres subdominios para el conocimiento del contenido: Conocimiento Común del Contenido (CC), Conocimiento Especializado del Contenido (CE) y Conocimiento del Horizonte (CH); y el conocimiento pedagógico del contenido con otros tres subdominios: Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEns), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), y Conocimiento del Currículo (CCur) (ver Figura 1).

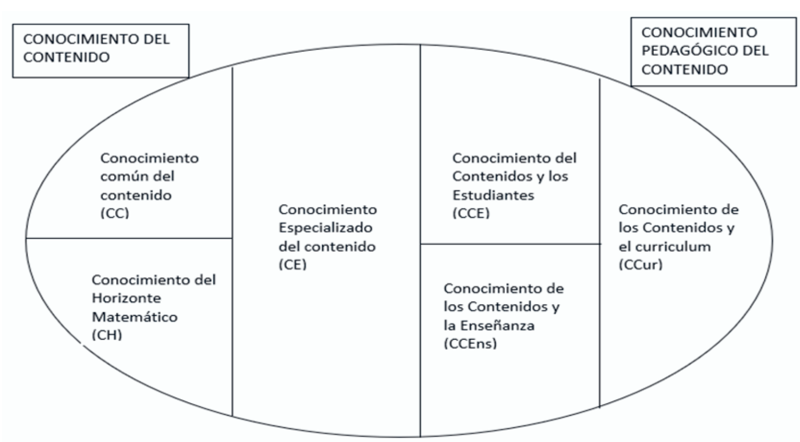

Figura 1. Dominios y Subdominios del Modelo CME.
Nota: Imagen adaptada de "Content knowledge for teaching: What makes it special", por D. Ball, M. Thames y G. Phelps, 2008, *Journal of teacher Education 59*(5), p. 403.

- Conocimiento Común del Contenido (CC). Se refiere al conocimiento matemático y habilidades que otros profesionales también poseen en su labor profesional, es decir, no es exclusivo de la enseñanza. Por ejemplo, a la pregunta ¿Cuánto es 0/7? podrían responder personas que conocen la matemática; contadores deben calcular y conciliar números, pero no necesita explicar por qué, cuando multiplica por 10, "agrega cero" (Ball *et al*., 2008).
- Conocimiento Especializado del Contenido (CE). Se refiere al conocimiento matemático y habilidades propias de los profesores. El conocimiento profesional es exclusivo del profesor de matemática. Por ejemplo, responder a las preguntas de los estudiantes sobre el "por qué"; cómo explicar y justificar las ideas propias de la matemática (por ejemplo, por qué inviertes y multiplicas para dividir fracciones) (Ball *et al*., 2008).
- Conocimiento del Horizonte Matemático (CH). Se refiere al conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extra-matemática (Sosa y Carrillo, 2010).
- Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE). Es el conocimiento que combina el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento de la matemática. Ante una tarea los profesores deben anticipar las respuestas y las dificultades de los estudiantes. Al elegir un ejemplo, los profesores deben predecir lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador. Deben tener la capacidad de interpretar el razonamiento de sus estudiantes (Ball *et al*., 2008).
- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEns). Combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento sobre la matemática. Las tareas matemáticas de la enseñanza requieren un conocimiento matemático para su diseño y secuenciación. Los profesores eligen con qué ejemplo comenzar y qué ejemplos usar para profundizar los contenidos de sus estudiantes, ellos evalúan las ventajas y desventajas de las representaciones que utilizan para enseñar un concepto e identifican lo que ofrecen para la instrucción los diferentes métodos y procedimientos. Por ejemplo, conocer los diferentes modelos instruccionales viables para el valor posicional (Ball *et al*., 2008).
- Conocimiento del Contenido y el Currículum (CCur). Se refiere al conocimiento del nivel de los cursos a los que pertenecen los contenidos, los programas de estudios y materiales curriculares (Shulman, 1986).

2.2. FORMACIÓN INICIAL DOCENTE Y CURRÍCULUM NACIONAL EN EL ÁREA DE GEOMETRÍA

En las últimas décadas en Chile, se han implementado diversas iniciativas en pro de la mejora de la calidad de la educación. Entre las formuladas e implementadas para fortalecer la FID, podemos mencionar: la Beca Vocación de Profesor, los Convenios de Desempeño para las instituciones de Educación Superior, la Prueba INICIA (implementada del 2008 al 2015) y la elaboración de los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estos estándares, como su nombre lo indica, tienen el rol de orientar a las instituciones formadoras sobre lo que se espera que todo profesor debe saber y saber hacer en el aula, así como las actitudes profesionales que debe desarrollar desde su formación como profesor de Educación Básica (Mineduc, 2012b). En dichos estándares, se encuentra el conocimiento pedagógico y disciplinar de las asignaturas: Lenguaje y Comunicación; Matemática; Historia, Geografía y Ciencias Sociales y Ciencias naturales, que deben manejar los egresados de Pedagogía en Educación Básica y que serán evaluados en la ENDFID.

Especial interés tiene la promoción de la calidad de las competencias docentes del área de matemática dado los bajos resultados obtenidos tanto en pruebas nacionales como internacionales, por estudiantes de enseñanza básica y media (Pincheira y Vázquez, 2018). Los estándares relacionados con matemática se encuentran organizados en cinco ejes que conforman el currículum escolar, uniendo los de Geometría y Medición en uno solo denominado Geometría, de esta manera se compone de: Números, Geometría, Álgebra y, Datos y Probabilidades. Estos combinan las dimensiones disciplinaria y pedagógica. Los estándares pedagógicos involucran las competencias genéricas de la función docente implicados en el proceso de enseñanza. En cambio, los estándares disciplinarios involucran el conocimiento y habilidades que debe demostrar el docente del manejo de la disciplina que enseña (Pincheira y Vázquez, 2018). El eje de Geometría contempla los siguientes cinco estándares:

> Estándar 7. Es capaz de conducir el aprendizaje de las formas geométricas. Orientado a la visualización de cuerpos y figuras, reconocimiento, clasificación y estimación de sus dimensiones.
>
> Estándar 8. Es capaz de conducir el aprendizaje de las figuras planas. Orientado al trabajo de figuras planas presentes en el currículo escolar, tales como, triángulos, paralelogramos y polígonos.
>
> Estándar 9. Está preparado para conducir el aprendizaje de conceptos y aplicaciones de la medición. Se relaciona con las mediciones, orientadas al trabajo con peso, masa y volumen respecto de la forma de un objeto, mediante la utilización de unidades estandarizadas y no estandarizadas.
>
> Estándar 10. Está preparado para conducir el aprendizaje de los conceptos de perímetro, área y volumen. Orientado a temas relacionados al cálculo de perímetro, área y volumen.
>
> Estándar 11. Demuestra competencia disciplinaria en el eje de Geometría. Orientado a las habilidades disciplinarias que debiese demostrar el profesor para conducir el aprendizaje de este eje.

De los estándares medidos en la ENDFID en los años 2018 y 2019, los estudiantes de pedagogía de educación básica en Chile no alcanzan el 40% de respuestas correctas en el estándar 7, sobre la capacidad de conducir el aprendizaje de las formas geométricas, ni tampoco el 50% de respuestas correctas en el estándar 10 sobre la preparación para conducir el aprendizaje de los conceptos de perímetro, área y volumen (Mineduc, 2019; Mineduc, 2020).

Los estándares del eje de geometría se encuentran estrechamente relacionados con los objetivos de aprendizaje (que involucran contenidos, habilidades y actitudes) presentes en las Bases Curriculares oficializadas de acuerdo con el Decreto Supremo de Educación

N°433 y 439 del 2012 (Mineduc, 2012a), documento que explicita el currículum nacional escolar y que establece los contenidos y objetivos mínimos obligatorios para toda la enseñanza básica. Dentro de los temas y conceptos que se abordan a nivel escolar en los ejes de geometría y medición, desde 1° a 8° básico, identificamos ocho tópicos los cuales describimos a continuación:

1. El tópico relacionado con "Identificar formas 2D Y 3D, y sus propiedades", se compone de los siguientes conceptos: líneas rectas y curvas, figuras 2D, línea de simetría, rectas paralelas, que se intersectan y perpendiculares. En cuanto a las Figuras 3D, estas se describen respecto a la forma de sus caras, aristas y vértices; aristas y caras paralelas, que se intersectan y perpendiculares. Se avanza además al concepto de Área y superficie de cubos y paralelepípedos y la visualización de figuras 3D, desde el frente, desde el lado y desde arriba; Concepto de círculo, relación entre diámetro, radio y perímetro del círculo e identificándolo como lugar geométrico; explicar el teorema de Pitágoras y aplicarlo en la resolución de problemas.

2. El tópico relacionado con "Posición, dirección y movimiento", se compone de los siguientes conceptos: posición de objetos y personas en relación a sí mismos y a otros objetos y personas; localización de un objeto en un mapa simple o cuadrícula; localización absoluta de un objeto en un mapa simple con coordenadas informales y la localización relativa con relación a otros objetos; uso de coordenadas en el primer cuadrante del plano cartesiano; uso de pares ordenados y vectores (material concreto y pictórico) para ubicar puntos en el plano cartesiano.

3. El tópico relacionado con "Ángulos", se compone de los siguientes conceptos: concepto de ángulo usando como referentes ángulos de 45° y 90°; identificación de ángulos opuestos por el vértice y complementarios en rectas que se intersecan; suma de ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros; relación entre ángulos exteriores e interiores en diversos polígonos.

4. El tópico relacionado con "Construcción y dibujo", se compone de los siguientes conceptos: construcción de figuras 2D (triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto; construcción de figuras 3D (cubos, paralelepípedos, esferas y conos) con diversos materiales; ángulos con el transportador; construcción de ángulos agudos, obtusos y rectos, extendidos y completos con instrumentos geométricos o software geométricos; construcción de triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y/o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométrico.

5. El tópico relacionado con "Comparar y estimar en el área de la medición", se compone de los siguientes conceptos: estimar el peso de objetos de uso cotidiano, usando referentes; estimar áreas de figuras irregulares; uso de unidad no estandarizada para medir el volumen de un cuerpo; desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros, estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.

6. El tópico relacionado con “Medir y calcular”, se compone de los siguientes conceptos: medir longitudes usando unidades de medidas no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m); medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm); medir el peso (g y kg); medir el perímetro de diversas figuras 2D; determinar el área de superficies cuadradas; calcular el área de triángulos, paralelogramos y trapecios; calcular el volumen de cubos y paralelepípedos expresando el resultado en cm^3, m^3 y mm^3; estimar y medir ángulos, usando el transportador, expresando las mediciones en grados; calcular ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal y en triángulos; en el círculo: estimar de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo y aplicar las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria.

7. El tópico relacionado con “Medir el tiempo”, se compone de los siguientes conceptos: usar unidades no estandarizadas de tiempo para comparar la duración de eventos cotidianos; leer horas y medias horas en relojes digitales, en el contexto de la resolución de problemas; leer y registrar el tiempo en horas, medias horas, cuartos de hora y minutos en relojes análogos y digitales; leer y registrar diversas mediciones del tiempo en relojes análogos y digitales, usando los conceptos AM, PM y 24 horas.

8. El tópico relacionado con “Conversión de medidas”, se compone de los siguientes conceptos: realizar conversiones entre unidades de tiempo en el contexto de la resolución de problemas: el número de segundos en un minuto, el número de minutos en una hora, el número de días en un mes y el número de meses en un año; realizar transformaciones entre (m a cm) estas unidades en el contexto de la resolución de problemas; realizar transformaciones entre unidades de medidas de longitud: km a m, m a cm, cm a mm y viceversa, de manera manual y/o usando software educativo.

3. METODOLOGÍA

Dado que esta investigación tiene como propósito describir perfiles de conocimiento para enseñar geometría en estudiantes de pedagogía de educación primaria, hemos construido y validado un instrumento, que adopta un diseño cuantitativo de carácter descriptivo y relacional entre los dominios de conocimiento matemático para enseñar la Geometría.

3.1. MUESTRA

La población de estudio corresponde a estudiantes de formación inicial de docentes en Educación Primaria, provenientes de dos universidades chilenas. La muestra inicial se compuso de 213 invitados. De los cuales, 60 no respondieron la prueba, 58 la respondieron parcialmente y 1 rechazó consentimiento. Por tanto, la muestra final se conformó por 94 estudiantes, quienes completaron la prueba.

3.2. PROCEDIMIENTO

La prueba se aplicó de manera remota en el año 2020[2]. Se envió un enlace vía electrónica al correo institucional de cada estudiante, redirigiendo al cuestionario, indicando el propósito de investigación y relevancia del estudio. Se contestó de forma voluntaria y bajo el consentimiento de las personas encuestadas previo a su aplicación. La duración promedio de la aplicación fue de 50 minutos. La base de datos requerida para los análisis se conformó con las respuestas enviadas al finalizar el cuestionario.

3.3. ELABORACIÓN DEL INSTRUMENTO

Para desarrollar y construir el instrumento, primero se analizaron los programas de las asignaturas de Geometría o Enseñanza de la Geometría de las instituciones participantes. Usando la técnica de comparación constante de la teoría fundamentada (Strauss y Corbing, 2016) se definieron los objetivos curriculares escolares que abordan las asignaturas. Luego se procedió a preguntar a 5 formadores de profesores de las mismas instituciones la relevancia de estos objetivos en sus asignaturas, llegando a saturar y a establecer la matriz de especificación, que luego del proceso de validación quedó reducida en la Tabla 1.

[2] Se tuvo que hacer en forma remota, ya que las universidades estaban trabajando en ese formato dado la emergencia sanitaria producida por el COVID-19.

Tabla 1. Distribución de los ítems en la matriz de especificación considerando OA curriculares 2019 y dimensiones del conocimiento matemático para enseñar

		DIMENSIÓN					
NIVEL	CATEGORÍAS	CCM			CPC		
		CC	CH	CE	CCE	CCEns	CCur
GEOMETRÍA							
Curso	*IDENTIFICAR FIGURAS 2D Y 3D, Y SUS PROPIEDADES*						
3ero	OA 15					V53, V54	
3ero	OA 16	V27					
4to	OA16				V60, V64		
4to	OA 17			V92			
5to	OA17				V90		
	ÁNGULOS						
6to	OA 16	V93					
6to	OA 17			V29			V91
	CONSTRUCCIÓN Y DIBUJO						
6to	OA 15					V70	
7to	OA 12	V69					
MEDICIÓN							
	MEDIR Y CALCULAR						
2do	OA 19					V79, V80, V81, V82	
4to	OA 23				V31		
5to	OA 22			V38, V42, V40			
7to	OA 13	V43					
7to	OA 11			V85, V87			
6to	OA19					V72	
6to	OA18	V21					
6to	OA21	V44					

Nota: V_i = ítems del instrumento.

Luego, para la construcción de los ítems V_i, se optó por el formato de selección de respuesta, específicamente de selección múltiple con respuesta correcta única (Haladyna y Rodriguez, 2013). Para el barrido de la matriz de especificación se consideró diseñar al menos un ítem por subdimensión del conocimiento matemático para enseñar.

3.4. ANÁLISIS DE DATOS

Los análisis se realizan en cinco etapas para ajustar y determinar los ítems finales del instrumento, lo que incluye la eliminación de los que no cumplen las condiciones de ajuste, y con ello establecer los perfiles de conocimiento. Primera etapa: validez de contenido por evaluación de expertos, esto para verificar la validez de relación entre los ítems y las dimensiones de conocimiento matemático para enseñar y los contenidos establecidos en el currículo escolar seleccionados y ajustados por la matriz de especificación. Segunda etapa: se emplea un análisis factorial exploratorio (AFE) para determinar si los indicadores propuestos en el instrumento comparten alguna estructura latente. Tercera etapa: luego de levantar los factores con AFE, se realiza un análisis factorial confirmatorio (AFC), que tiene por objetivo la búsqueda de combinaciones de variables observadas (ítems de la escala) en un número inferior de variables latentes. Cuarta etapa: se realiza un análisis de confiabilidad, determinando los coeficientes de consistencia interna para cada una de las variables no observadas. Los coeficientes de consistencia que se van a determinar son las cotas determinadas por Guttman (1945), entre las cuales se encuentra el coeficiente Alfa de Cronbach. Por último, en la quinta etapa, se realiza un análisis de clases latentes (ACL) para determinar los perfiles de desempeño por área disciplinar y por dimensión del marco de conocimiento para enseñar matemática.

Los índices estadísticos empleados para determinar el ajuste de los modelos AFE y AFC son el coeficiente Chi-Cuadrado ($\chi 2$), el índice relativo Tucker-Lewis (TLI), el índice comparativo de ajuste (CFI) y criterio de información bayesiano (BIC). Luego, se estimará el Error Cuadrático Medio de Aproximación (RMSEA). Para el ajuste de los modelos, se han considerado como aceptables valores TLI y CFI mayores a .90. Valores mayores .95 se han considerado como buenos (Hu y Bentler, 1999). Por último, para RMSEA se han considerado valores menores a .05 como buen ajuste, y entre .05 y .08 como un ajuste regular (Schermelleh-Engel *et al*., 2003).

4. RESULTADOS

Previamente, se realiza un análisis ítems-test el cual muestra índices de confiabilidad que llegan a .77 (ver Tabla 2), valor que también obtiene la prueba completa, considerado muy bueno (Novick y Lewis, 1967). Ahora bien, los ítems V1, V65, V66, V28, V51, V67, V94 y V62 presentan una baja correlación con la prueba, menores a .10 por lo que al eliminarlos produce un aumento del coeficiente Alpha de Cronbach, llegando a .80. Luego, se procede a ejecutar un AFE con el resto de los ítems.

Tabla 2. Coeficientes de confiabilidad Alpha de Cronbach y correlación ítems-test

Ítem	Alpha	r.cor
V1	.76	.047
V65	.76	.115
V66	.76	.038
V71	.76	.291
V27	.76	.271
V29	.75	.381
V79	.75	.401
V80	.76	.226
V81	.75	.346
V82	.75	.414
V83	.76	.168
V20	.76	.153
V28	.77	-.010
V23	.76	.110
V38	.75	.399
V39	.76	.170
V40	.75	.329
V41	.76	.231
V42	.75	.398
V72	.76	.307
V133	.76	.180
V134	.76	.217
V84	.76	.164
V85	.75	.420
V86	.76	.231
V87	.75	.344
V88	.76	.218
V73	.75	.330
V30	.75	.367
V31	.75	.343
V50	.76	.221
V51	.77	-.003

Ítem	Alpha	r.cor
V52	.76	.211
V53	.75	.442
V54	.76	.229
V89	.76	.213
V44	.75	.406
V43	.75	.329
V91	.75	.389
V67	.77	-.082
V21	.76	.214
V94	.76	.127
V92	.76	.293
V68	.76	.134
V60	.75	.405
V61	.76	.171
V62	.77	.022
V63	.76	.276
V64	.75	.408
V93	.75	.399
V69	.75	.454
V70	.75	.446
V90	.75	.446

Nota: Índices de ajuste KMO = .62 y Barlett χ^2 (N = 94, gl = 496) = 768.1519, p < .00.

4.1. ANÁLISIS FACTORIAL EXPLORATORIO

Los supuestos para realizar el AFE no cumplen lo requerido, pues el valor del índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) de adecuación muestral son considerados muy bajos (KMO = .49 y Barlett χ^2 (N = 94, gl = 990) = 1644.306, p < .00), por lo que se requiere eliminar más ítems. Al eliminar catorce ítems de baja correlación con la prueba (ver Tabla 2), los valores de KMO de adecuación muestral y los valores del test de esfericidad de Bartlett (significativos al 99%) para la muestra respetan los límites y permite realizar un análisis factorial (Tabachnick *et al.*, 2007).

En primer lugar, se ejecuta un AFE considerando el método de estimación de Máxima Verosimilitud (ML) y rotación Varimax. El número de factores a retener se determina considerando el análisis paralelo, arrojando tres factores (ver Figura 2). El modelo presenta buenos índices de ajustes tanto absolutos como relativos para la muestra.

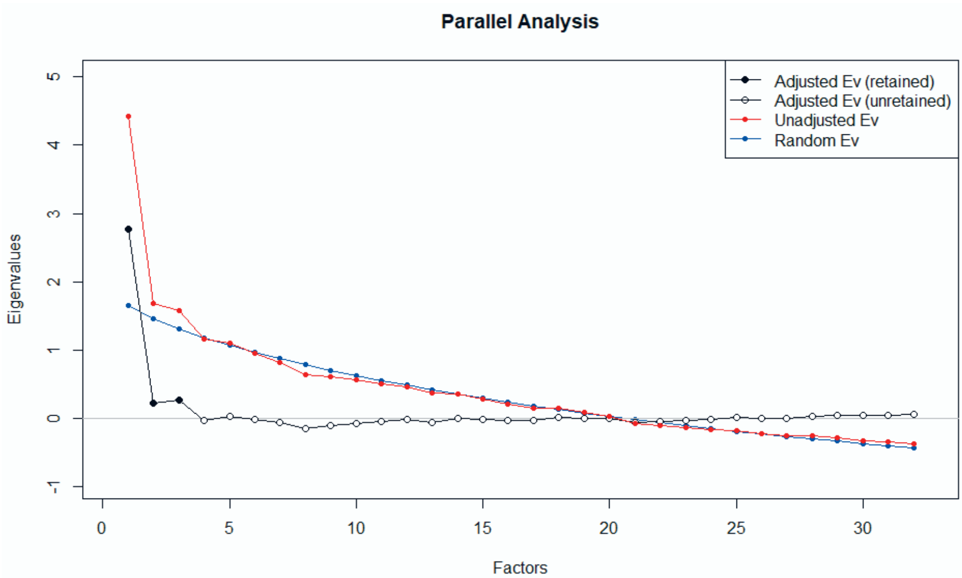

Figura 2. Análisis paralelo realizado sobre matriz de correlaciones.
Nota: Índices de ajuste del AFE χ^2 (N = 94, gl = 403) = 415.64, p < .32; TLI = .939; RMSEA = .015.

Al analizar las cargas factoriales de los ítems para el modelo de tres factores se obtienen cuatro con correlaciones bajo .3, los que fueron eliminados. Además, el ítem V30 presenta cargas similares en dos factores, etiquetados como MR1 y MR3, de .31 y .34, respectivamente. Por tanto, se procede a realizar el AFC para 3 modelos distintos que se establecen con: 27 ítems donde V30 está en MR3, 27 ítems con V30 en MR1 y MR3, y 26 ítems eliminando ítem V30.

4.2. ANÁLISIS FACTORIAL CONFIRMATORIO

Se realizaron estimaciones para los tres modelos descritos, usando el modelo de extracción Maximum Likelihood. En Tabla 3 se aprecia que el modelo 3 es el que posee los mejores niveles de ajustes relativos y absolutos.

Tabla 3. Resumen de estimaciones realizadas para la extracción de tres factores

Modelo	χ^2 (gl)	CFI	TLI	RMSEA	RMSEA (90% CI)
1 (27 ítems. Ítem V30 en MR3)	445.130 (350)***	.738	.718	.054	.037 – .068
2 (27 ítems. Ítem V30 en MR1 y MR3)	440.693 (349)**	.748	.727	.053	.036 – .068
3 (26 ítems. Sin ítem V30)	388.701 (324)**	.802	.785	.046	.025 – .062

Nota. *p < .05, **p < .01, ***p < .001.

Así, la prueba finalmente se compone por 26 ítems con tres constructos latentes. Las cargas finales se muestran en **¡Error! La autoreferencia al marcador no es válida.**. El agrupamiento disciplinar responde a relaciones entre los objetivos de aprendizaje. El primer grupo lo componen ítems que abordan principalmente contenidos referidos a ángulos, el segundo a definiciones conceptuales y, el tercero a procesos de medición y visualización en Geometría.

Tabla 4. Cargas factoriales de los ítems de modelo de tres factores

Tópico	χ^2 (gl)	CFI	TLI	RMSEA	Ítem	Carga Factorial
ANG	42.507 (35)	.945	.929	.048	V81	.477**
					V82	.582***
					V72	.312**
					V44	.632***
					V91	.604***
					V93	.470**
					V69	.481**
					V70	.596***
					V90	.437**
DEF	44.652 (27)*	.795	.727	.083	V27	.445**
					V29	.325*
					V38	.566**
					V42	.349*
					V87	.300*
					V31	.613**
					V43	.582**
					V21	.353*
					V92	.303*
MED+VIS	22.324 (20)	.965	.952	.035	V79	.562**
					V80	.361**
					V40	.373**
					V85	.375**
					V53	.497**
					V54	.527**
					V60	.464**
					V64	.493**

Nota. *p < .05, **p < .01, ***p < .001.

4.3. CONSISTENCIA INTERNA

La prueba completa tiene una consistencia interna que varía entre .77 como subestimación y .89 como sobreestimación. Para la prueba completa, el Alpha de Cronbach alcanza a .80. La dimensión ANG tiene una confiabilidad que varía entre .68 y .82, siendo la más alta entre las dimensiones. La dimensión DEF tiene una confiabilidad que varía entre .60 y .79. Por último, la dimensión MED+VIS presenta una confiabilidad que varía entre .59 y .78, presentando la menor consistencia interna.

4.4. PERFILES DE DESEMPEÑO POR ÁREA DISCIPLINAR ESCOLAR

Del ACL a las respuestas correctas de los ítems que quedaron luego de la validación, el modelo con dos clases obtiene los mejores ajustes para los ítems del primer factor referido a Ángulos. La probabilidad de pertenecer a la clase 1 es igual a 32% y la de pertenecer a la segunda de 68%.

Tal como se observa en la Tabla 5, la primera clase se compone por aquellos estudiantes de pedagogía que presentan probabilidades mayores a .5 de responder correctamente todos los ítems del primer factor denominado Ángulos. Por su parte, la segunda clase la componen estudiantes de pedagogía que presentan probabilidades menores a .5 de responder de forma correcta estos ítems.

Tabla 5. Probabilidad de pertenencia a cada clase del factor "Ángulos"

Tópico	Ítem	Prob. Clase 1 (N(%)=32%)	Prob. Clase 2 (N (%)=68%)	Dif. Clase 1 y Clase 2
ANG	V81	.59	.12	.37***
	V82	.56	.07	.49***
	V72	.51	.22	.29***
	V44	.85	.16	.69***
	V91	.69	.12	.57***
	V93	.88	.40	.48***
	V69	.50	.11	.39***
	V70	.78	.19	.59***
	V90	.62	.20	.40***

Nota. *p < .05, **p < .01, ***p < .001; Índices de ajuste para el modelo de dos clases BIC = 1064.95; AIC = 1011.55; G^2 = 249.73; χ^2(N = 94, gl = 73) = 2626.76.

Para el segundo grupo de ítems determinado por el segundo factor denominado "Definiciones", el ACL determina que el modelo con dos clases obtiene los mejores ajustes. La probabilidad de pertenecer a la clase 1 es igual a 38% y la de pertenecer a la segunda de 62%.

A diferencia del primer grupo de ítems, en la primera clase los estudiantes de pedagogía tienen probabilidades mayores a .5 en los ítems V27 alusivo a las relaciones entre prisma y pirámide, V38 referido a la definición y procedimiento del cálculo de área y perímetro de una figura, V31 relativo a la comprensión de la definición y procedimiento del cálculo del área de un rectángulo, V43 concerniente a la comprensión de la definición y procedimiento del cálculo del área de un triángulo, y V92 relativo a la comprensión de las líneas de simetría en figuras geométricas. Por su parte la segunda clase, la componen estudiantes de pedagogía que tienen probabilidades mayores o iguales a .5 en los ítems V27 y V92, tal como se observa en la Tabla 6.

Para el tercer grupo de ítems determinado por el tercer factor y denominado "Medida y Visualización", el ACL determina que el modelo con dos clases obtiene los mejores ajustes. La probabilidad de pertenecer a la clase 1 es igual a 89% y la de pertenecer a la segunda de 11%.

Tabla 6. Probabilidad de pertenencia a cada clase del factor "Definiciones"

Tópico	Ítem	Prob. Clase 1 (N=38%)	Prob. Clase 2 (N=62%)	Dif. Clas 1 y Clase 2
DEF	V27	.88	.52	.36***
	V29	.43	.13	.30**
	V38	.76	.22	.54***
	V42	.49	.15	.34***
	V87	.34	.09	.25**
	V31	.81	.26	.55***
	V43	.70	.15	.55***
	V21	.40	.21	.19*
	V92	.92	.50	.42***

Nota. *p < .05, **p < .01, ***p < .001. Índices de ajuste para el modelo de dos clases BIC = 1053.73; AIC = 1005.40; G^2 = 222.15; χ^2(N=94, gl = 75) = 566.94.

En la primera clase los estudiantes de pedagogía tienen probabilidades mayores a .5 en todos los ítems, excepto en el ítem V40 referido al cálculo del área de un cuadrado dispuesto en una grilla pero que ha sido rotado. Por su parte en la segunda clase, los estudiantes de pedagogía tienen probabilidades mayores .5 en el ítem V79 relacionado a la medición de la longitud de un segmento, tal como se observa en la Tabla 7.

Tabla 7. Probabilidad de pertenencia a cada clase del factor "Medida y Visualización"

Tópico	Ítem	Prob. Clase 1 (N=89%)	Prob. Clase 2 (N=11%)	Dif. Clas 1 y Clase 2
MED + VIS	V79	.99	.58	.41***
	V80	.78	.34	.44***
	V40	.45	.00	.45***
	V85	.66	.11	.55***
	V53	.84	.22	.66***
	V54	.79	.09	.70***
	V60	.81	.00	.81***
	V64	.68	.00	.68***

Nota. *p < .05, **p < .01, ***p < .001. Índices de ajuste para el modelo de dos clases BIC = 855.92; AIC = 812.69; G^2 = 120.40; χ^2(N = 95, gl = 77) = 166.75.

4.5. PERFILES DE DESEMPEÑO RESPECTO DEL MARCO DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR

Del ACL, el modelo con dos clases obtiene los mejores ajustes para los ítems de la primera dimensión del CME. La probabilidad de pertenecer a la primera clase es igual a 34% y a la segunda de 66%. La primera la componen estudiantes de pedagogía que tienen probabilidades menores .5 en sólo tres ítems de la dimensión de conocimiento común de la matemática escolar, tal como se observa en la Tabla 8. Los ítems son el V69 relativo al conocimiento de los elementos secundarios de un triángulo dispuesto en una circunferencia, el V21 referente al cálculo de superficies de paralelepípedos de igual altura y el V29 concerniente a la aplicación de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero. En la dimensión del conocimiento especializado, en el ítem V87 los estudiantes de pedagogía de esta primera clase presentan probabilidades menores a .5, ítem que aborda el conocimiento relativo a la determinación inductiva de la fórmula para el cálculo del área de un círculo. En la segunda clase, predominante en los estudiantes de pedagogía, presentan probabilidades mayores a .5 los ítems V27 y V92 de la dimensión de conocimiento común; el ítem V27 responde al objetivo de aprendizaje de describir prismas y pirámides, y el V92 a identificar figuras simétricas 2D. En la dimensión de conocimiento especializado los estudiantes de pedagogía de esta clase presentan probabilidades mayores a .5 en el ítem V85 relativo al conocimiento para aproximar el perímetro de una circunferencia mediante las bases de triángulos congruentes inscritos en ella.

Tabla 8. Probabilidad de pertenencia a cada uno de perfiles de clase del CCM

Dimensión CME	Subdimensión CME	Ítems	Prob. Clase 1 (N=34%)	Prob. Clase 2 (N=66%)
CCM	CC	V27	.89	.54
		V93	.90	.39
		V69	.43	.14
		V30	.50	.06
		V43	.63	.22
		V21	.44	.20
		V44	.67	.24
		V92	.97	.50
		V29	.47	.14
	CE	V38	.75	.26
		V40	.58	.32
		V42	.54	.15
		V85	.68	.57
		V87	.35	.10

Nota. CCM=Conocimiento del Contenido Matemático; CC=Conocimiento Común; CE=Conocimiento Especializado; Índices de ajuste para el modelo con dos clases BIC = 1707.29; AIC = 1628.45; G^2 = 723.40; χ^2(N = 94, gl = 63) = 21322.97).

Para el segundo grupo de ítems determinado por el análisis de validez y referido al conocimiento pedagógico del contenido, el ACL determina que el modelo con tres clases obtiene los mejores ajustes nuevamente. La probabilidad de pertenecer a la primera es igual a 65%, la de pertenecer a la segunda es de un 26%, y la de pertenecer a la tercera es de un 9%.

A diferencia de las separaciones anteriores, en la dimensión de conocimiento pedagógico del contenido, las respuestas de los estudiantes de pedagogía se agrupan en tres clases. La primera, compuesta por el 65% de los participantes, muestra probabilidades mayores a .5 en dos ítems de la subdimensión conocimiento del contenido y los estudiantes, los ítems V60 y V64 relativos al conocimiento de obstáculos que provocan errores al visualizar características de cubos dispuestos en una colección. Y en cuatro ítems de la subdimensión conocimiento del contenido y la enseñanza, los ítems V53, V54, V79 y V80. Los dos primeros abordan el conocimiento relativo a las características necesarias que pueden orientar la construcción de redes en niños y niñas. Los dos últimos, se refieren a la identificación de la mejor orientación para llevar a estudiantes, que ya tienen una solución sobre la medición de un segmento, a reflexionar y justificar la forma que encontraron, tal como se observa en la Tabla 9. Por otra parte, la primera y tercera clase muestran probabilidades menores a .5 en dos ítems de la subdimensión CCE, los ítems V90 y V31 que se relacionan con el conocimiento sobre los errores comunes de los estudiantes o sus confusiones más frecuentes en la identificación de líneas perpendiculares y en la comprensión de los conceptos de área y perímetro de un rectángulo, respectivamente.

Entonces, se puede observar que, en la subdimensión del conocimiento de la geometría y los estudiantes, los estudiantes de pedagogía tienen una mayor probabilidad de identificar errores comunes relacionados con la visualización de cuerpos geométricos que de identificar errores relacionados con ángulos y comprensión de conceptos de área y perímetro. En la subcategoría CCEns cuatro de los ocho ítems tienen probabilidades menores a .5 en al menos 2 de las 3 clases. Estos ítems se relacionan con el conocimiento para seleccionar actividades o estrategias pedagógicas que favorecen la comprensión o profundización de los contenidos por parte de los estudiantes, o elegir actividades que se ajusten a objetivos curriculares. El ítem V70 relativo a la selección de una estrategia pedagógica que permite una mejor comprensión de los distintos tipos de ángulos, los ítems V81 y V82 relativos a la selección de una actividad que permita a los estudiantes profundizar en un problema de medición de longitudes, y V72 relativo a seleccionar una actividad que se ajuste al objetivo curricular de calcular volumen de paralelepípedos. Por último, y en relación a la subdimensión del Conocimiento Curricular (CCur), esta se compuso de sólo un ítem que tuvo probabilidad menor a .5 para las clases 1 y 3, y que se relaciona con el conocimiento previo que requieren los estudiantes para comprender que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Tabla 9. Probabilidad de pertenencia a cada uno de perfiles de clase del CPC

Dimensión CME	Subdimensión CME	Ítems	Prob. Clase 1 (N=65%)	Prob. Clase 2 (N=26%)	Prob. Clase 3 (N=9%)
CPC	CCE	V90	.25	.58	.11
		V60	.79	.80	.00
		V64	.64	.71	.00
		V31	.45	.62	.00
	CCEns	V53	.85	.79	.20
		V54	.86	.63	.00
		V70	.24	.76	.12
		V79	.98	1	.53
		V80	.75	.82	.31
		V81	.11	.73	.00
		V82	.04	.73	.00
		V72	.27	.48	.11
	CCur	V91	.14	.73	.12

Nota. CPC=Conocimiento pedagógico del contenido; CCE=conocimiento del contenido y los estudiantes; CCEns=Conocimiento del contenido y la enseñanza; CCur=Conocimiento Curricular; Índices de ajuste para el segundo grupo de ítems BIC = 1449.35; AIC = 1345.08; G^2 = 437.71; χ^2(N = 94, gl = 53) = 4250.47.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Dado el análisis psicométrico desarrollado, sus ajustes y los índices de fiabilidad y confiabilidad que evidenció el instrumento, se puede afirmar que este puede ser utilizado con total confianza en el estudio del conocimiento matemático para enseñar la geometría de estudiantes de pedagogía de educación básica, a diferencia de otros instrumentos desarrollados en Chile (Varas *et al*., 2013) e internacionalmente (Charalambous *et al*., 2020) en las subdimensiones de conocimiento del contenido y los estudiantes, y conocimiento del contenido y la enseñanza. Más aun, el modelo metodológico usado permite clasificar a los estudiantes de pedagogía según sus niveles de desempeño lo cual facilita la toma de decisiones de los programas de formación inicial para crear sistemas de mejoras y acompañamiento continuo. Ahora bien, la separación observada por el análisis permite ahondar en el contenido curricular relativo a: ángulos, definiciones conceptuales referidas a elementos primarios, figuras y cuerpos, y conceptos asociados a medidas como el perímetro, área y volumen, y por último al proceso de medición y visualización de cuerpos. De forma acumulada, el primer factor de Ángulos explica el 43%, el segundo factor de Definiciones explica el 57%, y el último relativo a Medidas y Visualización al 53% de la varianza total.

En relación con el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, los perfiles difieren cuantitativamente, observando diversas cotas de CCM y CCE. Esto nos señala que, dentro de la muestra de este estudio, existen subgrupos de estudiantes de pedagogía que tienen diferentes niveles de conocimiento común y especializado en el área de la geometría y medición, el cual no responde a un plan de formación inicial especifico y muestral. Lo que está en línea con resultados de investigaciones respecto de la variabilidad del conocimiento matemático para enseñar de estudiantes de pedagogía (Charalambous *et al*., 2020). Esto puede ser causa de: oportunidades diferenciadas entre y en los mismos procesos de formación inicial (Chandía *et al*., 2021), por interpretaciones incompletas de las políticas de aseguramiento de la calidad como los Estándares de Formación Inicial por parte de académicos formadores, o también por la carencia de sistemas internos de comprensión e implementación transversal de los mismos en los planes de formación (Verdugo *et al*., 2021).

De forma específica, los ítems que tuvieron resultados medios o buenos para ambas clases tienen relación con los objetivos curriculares: “describir prismas y pirámides de acuerdo con la forma de sus caras, y el número de aristas y vértices”, “identificar figuras simétricas 2D” y “aproximar el perímetro de una circunferencia”. En cambio, los ítems que tuvieron resultados deficientes para ambas clases tienen relación con los objetivos curriculares de: “Construir líneas como las bisectrices de triángulos”, “Calcular la superficie de paralelepípedos” y “Demostrar de manera concreta, simbólica y pictórica que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º”. Esto prueba que el grado de pensamiento y razonamiento geométrico de los estudiantes de pedagogía es bajo y se relaciona con niveles de reconocimiento planteados por Van Hiele (1986), lo que está en línea investigaciones que reportan el mismo nivel de razonamiento (Vargas, 2017). Esto es de suma importancia porque a nivel escolar el razonamiento geométrico tampoco ha alcanzado niveles superiores ya hace aproximadamente una década en Chile (Aravena y Caamaño, 2013), pese a las reformas curriculares y a los talleres de formación continua que ha impulsado el Ministerio de Educación, por lo que el ciclo de niveles de razonamiento geométrico disminuidos se ha perpetuado.

Respecto a la dimensión Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) se identificaron 3 perfiles. El segundo, compuesto por el 26% de los participantes, se caracteriza por tener probabilidades mayores a .5 en 12 de los 13 ítems de esta dimensión. El primer perfil, que es el grupo más numeroso compuesto por el 65% de los estudiantes, se caracteriza por tener probabilidades mayores a .5 en 6 de los 13 ítems. El tercer perfil, con un 9% de participantes, se caracteriza por tener probabilidades mayores a .5 en sólo 1 de los 13 ítems. De nuevo y de manera más marcada que en la dimensión CCM, existen tres subgrupos de estudiantes de pedagogía que tienen diferentes niveles de conocimiento pedagógico en geometría y medición, donde un sólo grupo, el minoritario, muestra solidez en este dominio del CME. Respecto a la subdimensión Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), dos de los cuatro ítems que tienen probabilidades menores a .5 para los perfiles 1 y 3, ítems que se relacionan con el conocimiento sobre los errores comunes de los estudiantes o sus confusiones más frecuentes en geometría y medición. Esto nos muestra la necesidad que en las asignaturas de Geometría o Enseñanza de la Geometría de la FID (donde también se aborda el eje curricular de medición) se tenga como objetivo que los futuros profesores reconozcan los errores comunes o típicos de los estudiantes en estos ejes y además conozcan herramientas pedagógicas que ayuden a los propios estudiantes a aprovechar el error.

En relación con la subdimensión del Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEns) cuatro de los ocho ítems que tienen probabilidades menores a .5 en al menos 2 de las 3 clases. Estos ítems se relacionan con el conocimiento para seleccionar actividades o estrategias pedagógicas que favorezcan la comprensión o profundización de los contenidos por parte de los estudiantes, o elegir actividades que se ajusten a los objetivos curriculares. De nuevo, volvemos a la FID preguntándonos de qué manera en los programas de las asignaturas se plantean objetivos que orienten al desarrollo de habilidades de los futuros profesores para seleccionar y diseñar actividades, y de qué manera en las asignaturas se abordan estos. Por tanto, se observa la necesidad de que el conocimiento pedagógico de geometría y medición, en particular el CCE y CCEns, sean abordado con más fuerza en los programas de la FID. Por último, en relación con la subdimensión del Conocimiento Curricular (CCur), esta se compuso de sólo un ítem que tuvo probabilidad menor a .5 para las clases 1 y 3, y que se relaciona con el conocimiento previo que requieren los estudiantes para comprender que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

De lo anterior emanan algunas conclusiones. La primera es que existen grupos de estudiantes de pedagogía que tienen diferentes niveles de conocimiento del contenido de geometría y medición, y también hay grupos que tienen diferentes niveles de conocimiento pedagógico del área de geometría y medición. En ambas dimensiones, las clases minoritarias (34% y 26% respectivamente) son las que alcanzan los niveles más fuertes de conocimiento. De esto es posible plantear varias interrogantes tales como: a) ¿Por qué se observan perfiles diferenciados de conocimientos en programas de formación inicial con planes de estudio que supuestamente cumplen las políticas de aseguramiento de la calidad de la FID reflejado en los años de acreditación?, b) ¿Qué efecto tendrá esta variabilidad de perfiles en las decisiones didáctico matemáticas y el aprendizaje de la Geometría en el aula escolar ?, y c) ¿Será el perfil con mejor desempeño suficiente para predecir buenas decisiones didáctico-matemáticas y con ello lograr un aprendizaje geométrico en el aula escolar?

Blömeke y sus colegas (2020) señalan que los estudiantes de pedagogía presentan diferentes necesidades de formación por su trayectoria escolar y experiencia en procesos de enseñanza y aprendizaje, y por tanto la formación inicial docente como las estrategias de desarrollo profesional serían más eficaces si pudieran adaptar su oferta a estos perfiles. Por otra parte, y en respuesta a las últimas dos interrogantes, los programas de las asignaturas de Geometría o Enseñanza (Didáctica) de la Geometría deberían abordar con más fuerza el conocimiento pedagógico de la geometría y medición. Hay un amplio consenso en la comunidad de educación matemática que tanto el conocimiento de los errores típicos de los estudiantes como el conocimiento relativo a la selección o diseño de actividades son fundamentales para la labor profesional docente en el aula. Sin duda, estas necesidades demandan a las instituciones formadoras que estén dispuestas a reflexionar y adaptar sus programas en pos del desarrollo integral de los futuros docentes, y de los estudiantes que a su vez serán formados por estos.

Entre las limitaciones del estudio, se encuentra el tamaño de la muestra (N=94), por tanto, es deseable replicar el estudio con un grupo más amplio de estudiantes de pedagogía para obtener resultados más estables o generalizables. Otra limitación, relacionada con el instrumento diseñado, es que hubo subdimensiones del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza que contaron con muy pocos ítems o con ninguno, como el caso de la subdimensión Conocimiento del Horizonte que no fue medida y como la subdimensión Conocimiento Curricular que constó sólo de 1 ítem.

Teniendo en cuenta que el conocimiento matemático para enseñar geometría de los fututos profesores impactará en el aprendizaje de los estudiantes, los resultados que muestra este estudio son preocupantes y requieren de acciones para la mejora de la formación en Geometría. Se hace necesario realizar las modificaciones pertinentes a los programas formativos, otorgando importancia a todos los tipos de conocimiento referidos en nuestro marco teórico y a todos los ámbitos de la geometría involucrados en el currículum nacional y en la FID.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M. V. R. y Ribeiro, M. (2020). Conhecimento especializado de um formador de professores de matemática ao ensinar o teorema do algoritmo da divisão euclidiana: Um foco nos exemplos e explicações. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, *3(4),* 24–56.

Aravena Díaz, M. y Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(2), 179-211.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1).

Blömeke, S., Suhl, U. & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education*, *62*, 154–171. https://doi.org/10.1177/0022487110386798

Blömeke, S., Buchholtz, N., Suhl U. & Kaiser, G. (2014). Resolving the chicken-or-egg causality dilema: the longitudinal interplay of teacher knowledge and teacher beliefs. *Teaching and*

Teacher Education, *37*, 130–139. https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.10.007

Blömeke, S., Kaiser, G., König, J. & Jentsch, K. (2020). Profiles of mathematics teachers' competence and their relation to instructional quality. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 329–342. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01128-y

Buschang, R. E., Chung, G. K. W. K., Delacruz, G. C. & Baker, E. L. (2012). Validating measures of algebra teacher subject matter knowledge and pedagogical content knowledge. *Educational Assessment*, *17*(1), 1-21. https://doi.org/10.1080/10627197.2012.697847

Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H., DePiper, J. N., Frank, T. J., Griffin, M. J. & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 419–459. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz-Catalán, M. D. C. (febrero, 2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *Actas del CERME 8*, Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D. & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teachers specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chandía, E. D. C., Cerda, G. A., Pérez, C. E. & Huencho, A. A. (2021). Oportunidades de aproximación al aula escolar de educación matemática como criterio de calidad de los programas de formación de profesores de educación básica. *Formación universitaria*, *14*(3), 3-16. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000300003

Charalambous, C. Y. (2016). Investigating the knowledge needed for teaching mathematics: An exploratory validation study focusing on teaching practices. *Journal of Teacher Education*, *67*(3), 220–237. https://doi.org/10.1177/0022487116634168

Charalambous, C. Y., Hill, H. C., Chin, M. J. & McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: Exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 579–613. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2

Cochran-Smith, M. (2021). Rethinking teacher education: The trouble with accountability. *Oxford Review of Education*, *47*(1), 8–24. https://doi.org/10.1080/03054985.2020.1842181

Darling-Hammond, L. (2020). Accountability in teacher education. *Action in Teacher Education*, *42*(1), 60–71. https://doi.org/10.1080/01626620.2019.1704464

Delaney, S. (2012). A validation study of the use of mathematical knowledge for teaching measures in Ireland. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 427–441.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (20), 13–31.

Guttman, L. (1945). A basis for analyzing test-retest reliability. *Psychometrika*, *10*(4), 255–282. https://doi.org/10.1007/bf02288892

Haladyna, T. M. & Rodriguez, M. C. (2013). *Developing and validating test items*. Routledge.

Hiebert, J., Berk, D., Miller, E., Gallivan, H. & Meikle, E. (2019). Relationships between opportunity to learn mathematics in teacher preparation and graduates' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(1), 23–50. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.1.0023

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*, 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hill, H. C., Dean, C. & Goffney, I. M. (2007). Assessing elemental and structural validity: Data from teachers, non-teachers, and mathematicians. *Measurement*, *5*(2–3), 81–92. https://doi.org/10.1080/15366360701486999

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal* *for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hill, H. C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(5), 513–545. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.5.0513

Howey, K. R. y Grossman, P. L. (1989). A study in contrast: Sources of pedagogical content knowledge for secondary English. *Journal of Teacher Education*, *40*(5), 24–31. https://doi.org/10.1177/002248718904000504

Hu, L. T. y Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural equation modeling: a multidisciplinary journal*, *6*(1), 1–55. https://doi.org/10.1080/10705519909540118

Kaiser, G. y König, J. (2019). Competence Measurement in (Mathematics) Teacher Education and Beyond: Implications for Policy. *High Educ Policy*, *32*, 597–615. https://doi.org/10.1057/s41307-019-00139-z

Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM*, *40*(5), 873–892.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584–615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584

Ministerio de Educación. (2012a). *Bases Curriculares, Primero a Sexto Básico*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

______. (2012b). *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica*.

______. (2019). *Informe de Resultados Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018.* https://cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/06/Informe-nacional-Evaluacion-Nacional-Diagnostica-2018.pdf

______. (2020). *Informe de Resultados Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2019.* https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/08/Informe-Nacional-END-2019_rect.pdf

Munter, C. y Correnti, R. (2017). Examining relations between mathematics teachers' instructional vision and knowledge and change in practice. *American Journal of Education*, *123*(2), 171–202. https://doi.org/10.1086/689928

Novick, M. R., y Lewis, C. (1967). Coefficient alpha and the reliability of composite measurements. *Psychometrika*, *32*(1), 1–13. https://doi.org/10.1007/bf02289400

Pincheira, N. y Vázquez, C. (2018). Conocimiento Didáctico-Matemático para la Enseñanza de la Matemática Elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Estudios Pedagógicos*, *44*(1), 25-48. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100025

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Larraín, M. & Vargas, C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: 'voces' de la comunidad chilena de investigación en educación matemática. *Uniciencia*, *32*(1), 68–88. http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-1.5

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H. & Müller, H. (2003). Evaluating the fit of structural equation models: Tests of significance and descriptive goodness-of-fit measures. *Methods of psychological research online*, *8*(2), 23–74.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In *International handbook of mathematics teacher education: volume 2* (pp. 321-354). Brill Sense.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

______. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sosa, L. y Carrillo, J., (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. *Actas de Investigación en Educación Matemática XIV*, Lleida, España. https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf

Strauss, A. y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia.

Tabachnick, B. G., Fidell, L. S. & Ullman, J. B. (2007). *Using multivariate statistics*. Pearson.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic press.

Varas, L., Lacourly, N., López, A. & Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(1), 171–187.

Vargas, L. (2017). Niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de pedagogía educación general básica de una universidad perteneciente al consejo de rectores de Chile. *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa*, México DF, México. https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf

Verdugo, A., Tejada, J. & Navío, A. (2021). Valoración de la formación de los estándares pedagógicos según estudiantes de pedagogía. *Perfiles Educativos*, *43*(171), 119-137. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2021.171.59216